1 Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Extrem- und Sattelstellen.

a) $f(x)=x^2-4$

b) $f(x)=-1{,}5x^2+3x-7$

c) $f(x)=x^3+3x^2+1$

d) $f(x)=2x^3-18x^2+11$

e) $f(t)=t^4-2t^2$

f) $f(a)=-a^3+2{,}5a^2+3{,}5$

g) $f(x)=x^5-15x^3-30$

h) $f(x)=-3x^4+4x^3+8$

2 Bestimmen Sie Hoch-, Tief- und Sattelpunkte folgender Funktionen.

a) $f(x)=x^2+24x+144$

b) $f(x)=2x^3-6x^2+6x+4$

c) $f(x)=x^3-6x^2+9x-4$

d) $f(x)=5x^4-40x^2+15$

e) $f(x)=0{,}25x^3+15x-1$

f) $f(x)=2x^3-15x^2-84x$

3 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen von *f*.

a) $f(x)=x^3-6x^2+12x+2$

b) $f(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2+\frac{7}{2}x+\frac{3}{2}$

c) $f(x)=x^4-8x^3+30x^2+7$

5 Skizzieren Sie mögliche Graphen von *f*.

a) Der Graph von *f* ist rechtsgekrümmt und hat den Hochpunkt $H(2|4)$.

b) Der Graph von *f* hat im Punkt $P(-3|2)$ eine waagerechte Tangente und geht in diesem Punkt von einer Links- in eine Rechtskrümmung über.

c) Der Graph von *f* hat zwei Stellen mit waagerechter Tangente und wechselt nur an einer dieser Stellen seine Krümmung.

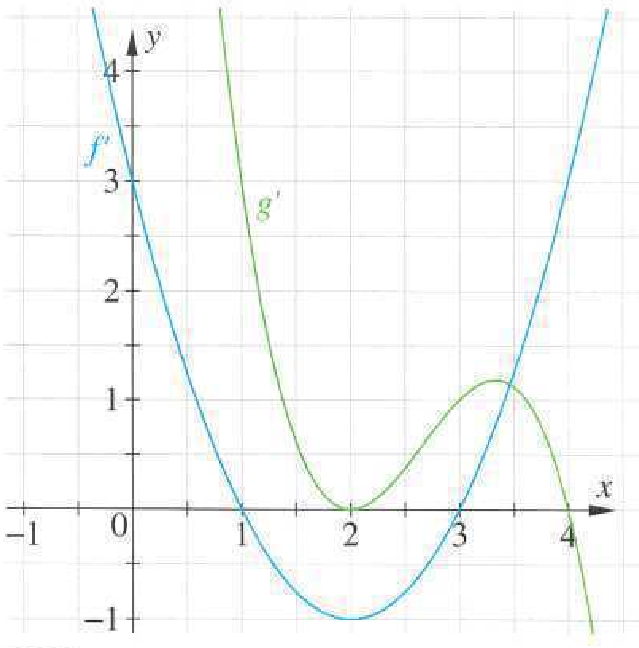
d) Der Graph von *f* ist linksgekrümmt und hat keine Extremstellen.

e) Es gilt: $f'(x)>0$ und $f''(x)>0$

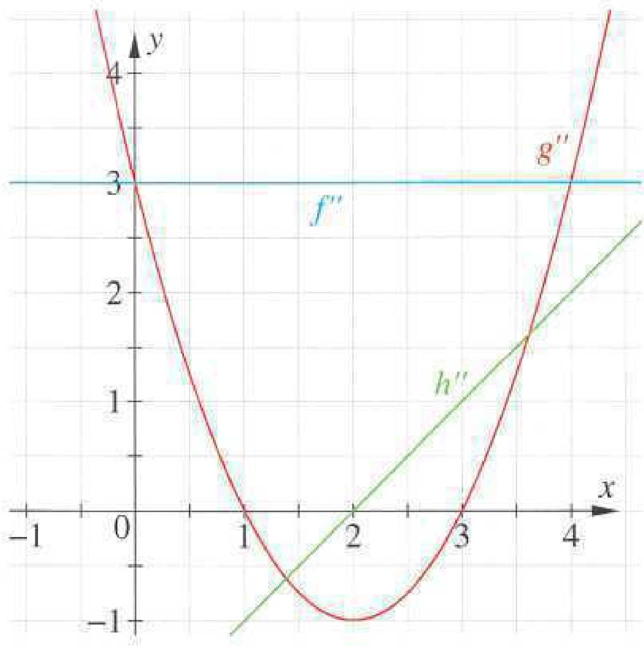
6 Graphensuche

a) Bestimmen Sie möglichst viele Eigenschaften der Graphen von *f* und *g*.

b) Skizzieren Sie mögliche Graphen von *f*, *g* und *h*.



127/1



127/2

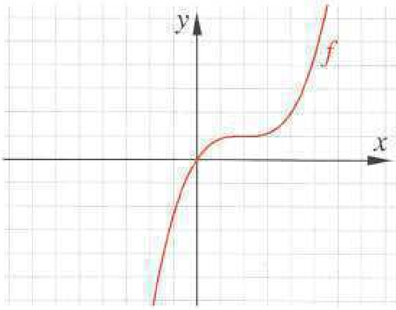
7 Gegeben ist die zweite Ableitung f'' der Funktion f. Bestimmen Sie die Wendestellen der Funktion f.

a) $f''(x) = 3(x+5)^4$
b) $f''(x) = 2x^2 + 3x$
c) $f''(x) = 2x^3 - 6x^2 - 8x$
d) $f''(x) = x^4 + 10x^2 + 9$
e) $f''(x) = -2x^4 + 58x^2 - 200$
f) $f''(x) = (x+1) \cdot (x-3)^2$

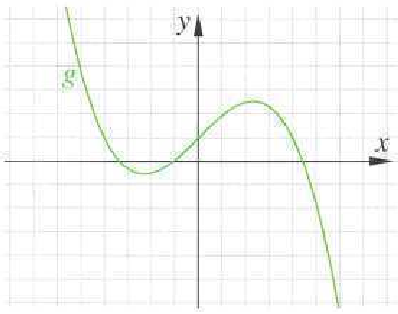
8 Graphen-Puzzle: Ordnen Sie die ersten und zweiten Ableitungen den Funktionen f, g und h zu und begründen Sie Ihre Wahl.

a)

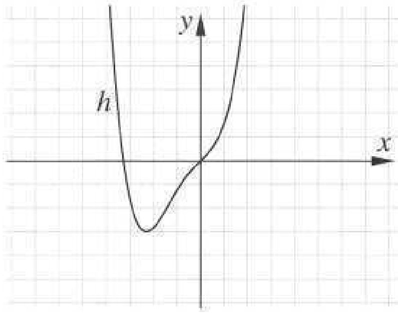
Funktionen



128/1

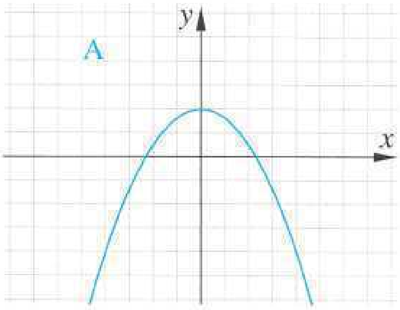


128/2

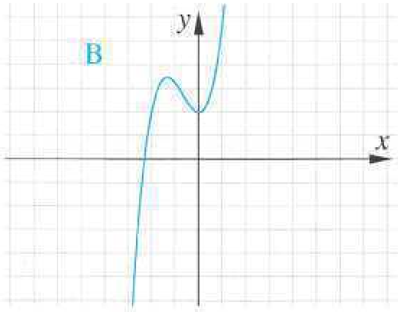


128/3

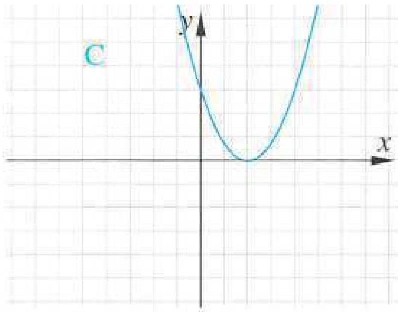
Erste Ableitung



128/4

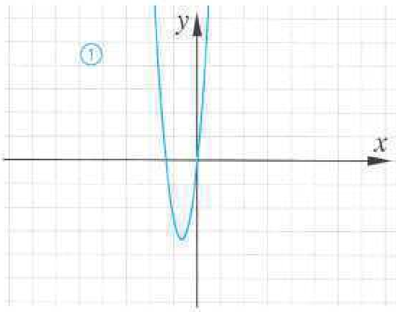


128/5

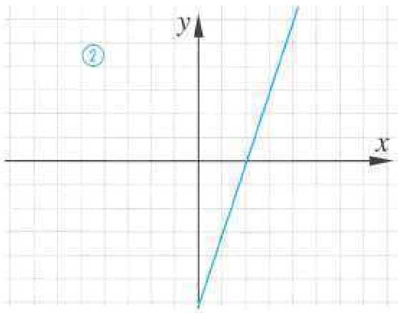


128/6

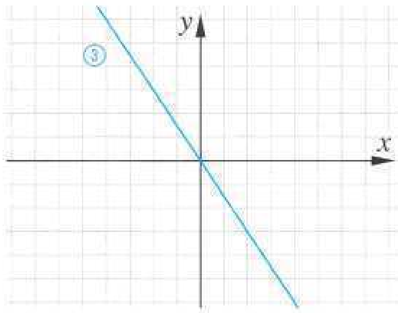
Zweite Ableitung



128/7

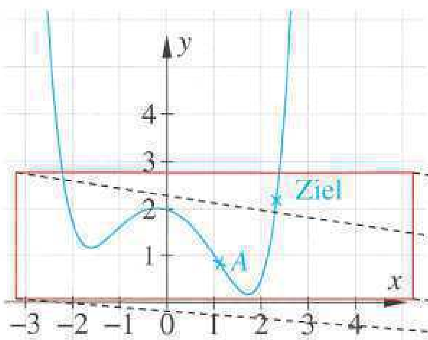


128/8



128/9

9 Mariokart
Mario und Toad liefern sich ein Rennen. Der untere Streckenabschnitt wird durch die Funktion $f: x \mapsto 0{,}3x^6 - 0{,}7x^2 - 0{,}3x + 2$ modelliert.



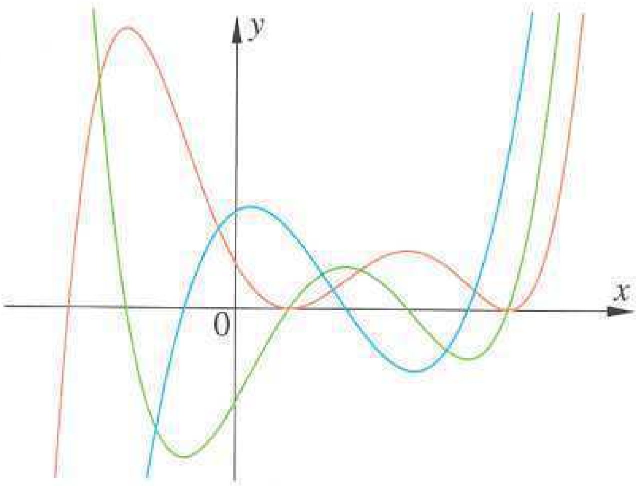
128/10

128/11

a) Bestimmen Sie den Streckenpunkt A, an dem Mario in die letzte Linkskurve eintritt, bevor es auf die „Zielgeraden" geht.
b) Ermitteln Sie den Streckenabschnitt, in dem Mario eine Rechtskurve durchfährt.

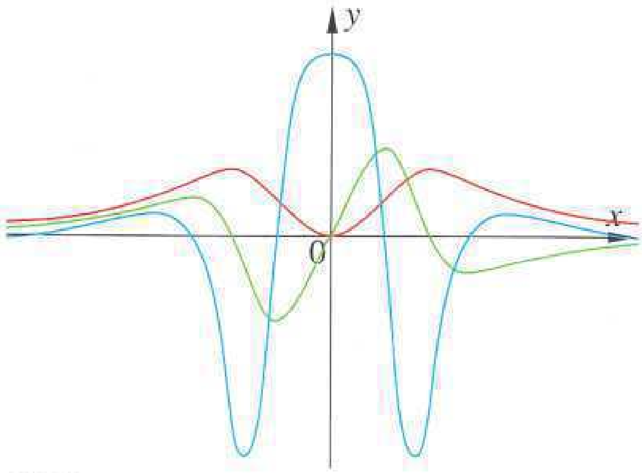
12 Welcher Graph gehört zu f, f' und f''? Begründen Sie.

a)



129/1

b)



129/2

13 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

a) Bestimmen Sie die Nullstellen von f.

b) Bestimmen Sie f', f'' und f'''.

c) Untersuchen Sie f auf Extrem- und Wendestellen.

d) Zeichnen Sie die Wende- und Extrempunkte in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie dann den Graphen von f.

15 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^4 - 8x^3 + 18x^2$.

a) Weisen Sie nach, dass $x = 0$ die einzige Nullstelle ist.

b) Berechnen Sie f', f'' und f'''.

c) Berechnen Sie die Extrem-, Sattel- und Wendepunkte des Graphen von f.

d) Zeichnen Sie die markanten Punkte des Graphen von f in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie dann den Graphen von f.

17 Die Funktion

$$g(x) = -20x^3 + 240x^2 - 420x - 760$$

gibt den täglichen Gewinn eines Unternehmens in Euro an, wenn ihr Produkt in der Stückzahl x produziert wird.

a) Berechnen Sie den monatlichen Gewinn des Unternehmens, wenn täglich eine Stückzahl von $x = 5$ hergestellt wird.

b) Für welche Stückzahl x haben Veränderungen der Produktionsmenge die größten Auswirkungen auf den Gewinn?

c) Berechnen Sie die Stückzahl x, für die das Unternehmen maximalen Gewinn erreicht.

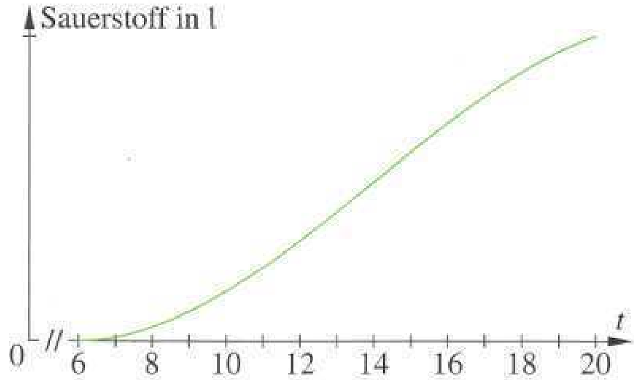
22 Am Eingang einer Discothek wird registriert, wie viele Besucher hinein und heraus gehen, so dass jederzeit die genaue Personenzahl im Lokal feststeht. Die Besucherzahl (in hundert Personen) wird durch die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{15}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{15}$ gut beschrieben, wobei x die Anzahl der Stunden nach Öffnung der Discothek um 20 Uhr ist.

a) Berechnen Sie die Anzahl der Besucher um 21, 23 und 1 Uhr.
b) Wann sind die meisten Besucher in der Disco? Wie viele sind es?
c) Welche Bedeutung hat der Wert $f'(3)$ im Sachzusammenhang?
d) Zu welcher Uhrzeit ist der Andrang am Eingang am größten?
e) Aus Sicherheitsgründen muss das Aufsichtspersonal verstärkt werden, wenn mehr als 150 Besucher im Lokal sind. Erstellen Sie mit geeigneten Werkzeugen (Funktionenplotter, o. ä.) den Graph der Funktion f und ermitteln Sie grafisch, ob und wenn ja in welchem Zeitraum eine Verstärkung des Aufsichtspersonals nötig ist.

23 Beim Prozess der Photosynthese produzieren Pflanzen u. a. Sauerstoff, den sie an ihre Umgebung abgeben. Die Funktion s mit

$$s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 14t^2 - 132t + 360$$

gibt an, wie viel Liter Sauerstoff eine Pflanze zwischen 6 Uhr und 20 Uhr insgesamt produziert hat, wobei t die Tageszeit angibt.



131/2

a) Wie viel Liter Sauerstoff hat die Pflanze bis 10 Uhr produziert?
b) Um wie viel Uhr produziert die Pflanze am meisten Sauerstoff?
c) Wie groß ist die durchschnittliche Sauerstoffproduktion pro Stunde dieser Pflanze im Zeitraum von 6 bis 20 Uhr?
d) In welchem Zeitraum ist der Graph der Funktion s linksgekrümmt? Welche Bedeutung hat dies im Sachzusammenhang?

3 Sind folgende Aussagen notwendige, hinreichende oder gar keine Bedingung dafür, dass ein Viereck ein Parallelogramm ist?

a) Die Diagonalen sind gleich lang.
b) Die Diagonalen halbieren sich gegenseitig.
c) Die Diagonalen stehen senkrecht aufeinander.
d) Zwei gegenüberliegende Seiten sind parallel.

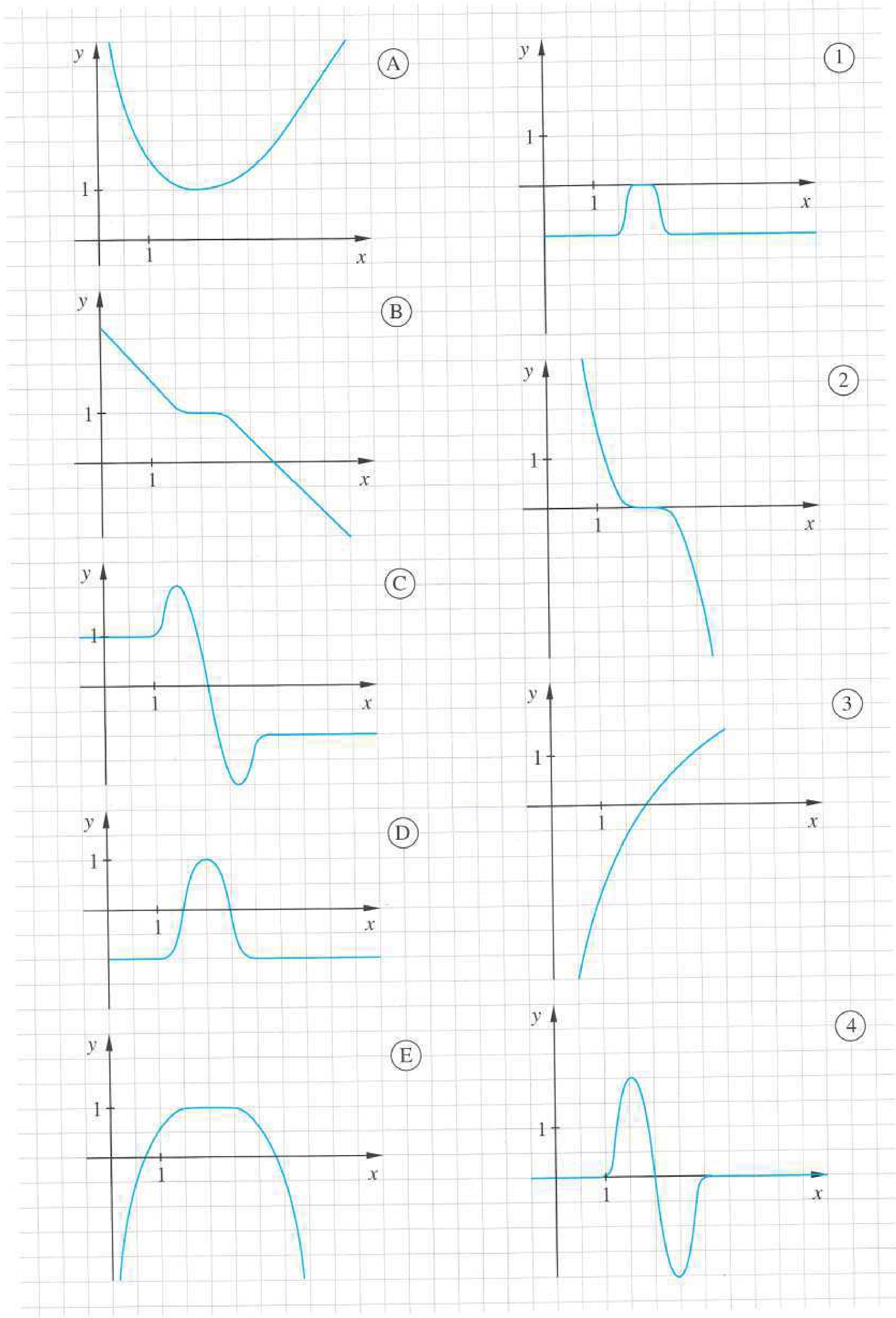
4 Entscheiden Sie, ob der erste Sachverhalt jeweils eine notwendige, hinreichende oder keine Bedingung für den zweiten Sachverhalt ist.

a) Zur Bushaltstelle gehen/Busfahren
b) Volljährigkeit/Wahlrecht
c) Regen/nasse Straße
d) Licht/Pflanzenwachstum
e) Hunger/Essen
f) Unwissenheit/schlechtes Klassenarbeitsergebnis
g) Leerer Autotank/stehendes Auto
h) Müdigkeit/natürliches Einschlafen

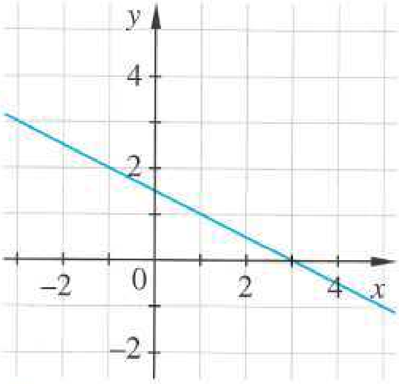
5 Skizzieren Sie den Graphen einer ganzrationalen Funktion f, der die folgenden Bedingungen erfüllt. Skizzieren Sie auch den Graphen der jeweiligen Ableitungsfunktion in das gleiche Koordinatensystem wie f.

a) f hat genau einen Hoch- und genau einen Tiefpunkt.
b) f hat genau einen Sattelpunkt und genau einen Tiefpunkt.
c) f hat keinen Hoch- und keinen Tiefpunkt.
d) f hat genau zwei Tiefpunkte.

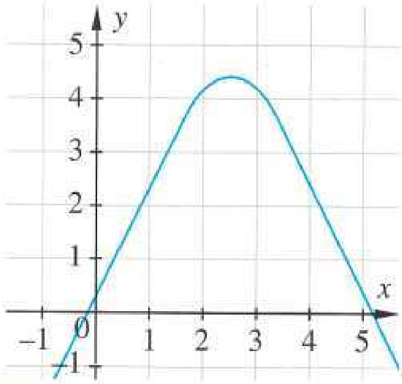
10 Die Abbildung zeigt links die Graphen von fünf Funktionen und rechts die Graphen der Ableitungsfunktionen zu vier von ihnen.
Ordnen Sie die Paare richtig zu und begründen Sie Ihre Lösung.
Ergänzen Sie den fehlenden Graphen.



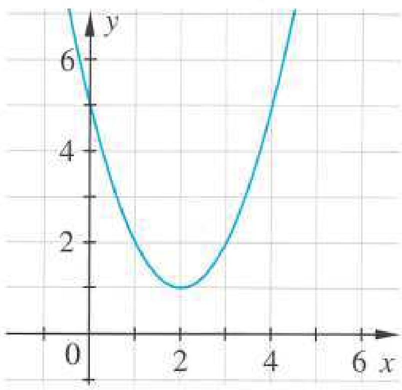
7 Geben Sie für die folgenden Graphen die Bereiche an, in denen die Ableitungsfunktion positive Werte hat. Ermitteln Sie jeweils die angegebenen Steigungen und skizzieren Sie den Graphen der zugehörigen Ableitungsfunktion.



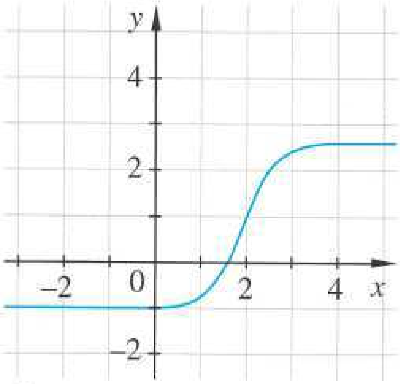
a) $f'(0), f'(1)$ *89/1*



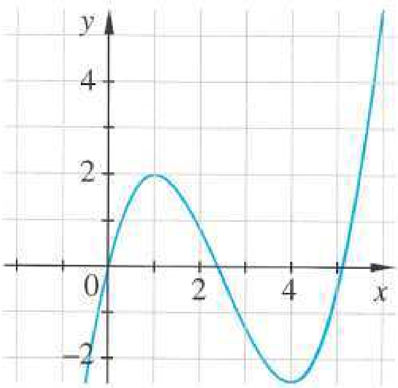
b) $f'(0), f'(1)$ *89/2*



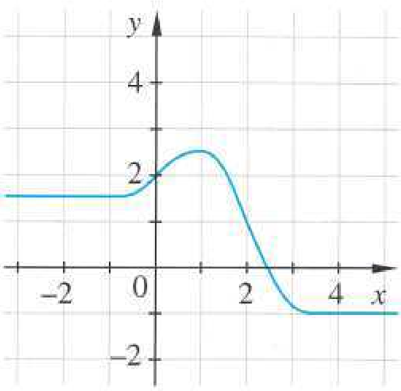
c) $f'(0), f'(1), f'(2{,}5)$ *89/3*



d) $f'(0), f'(2), f'(2{,}5)$ *89/4*

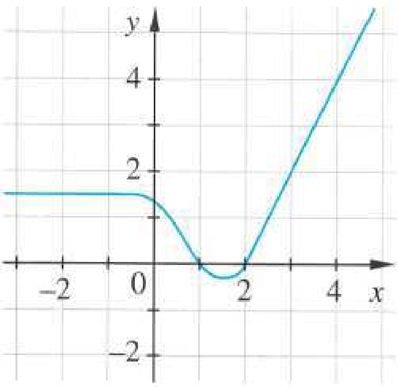


e) $f'(0), f'(1{,}5), f'(3)$ *89/5*

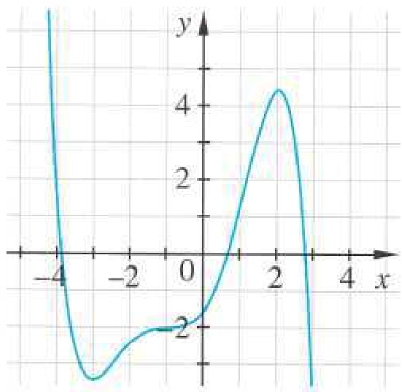


f) $f'(0), f'(2)$ *89/6*

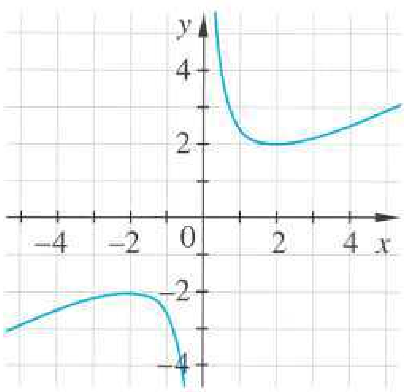
8 Skizzieren Sie den Graphen der Ableitungsfunktion zum dargestellten Funktionsgraphen.



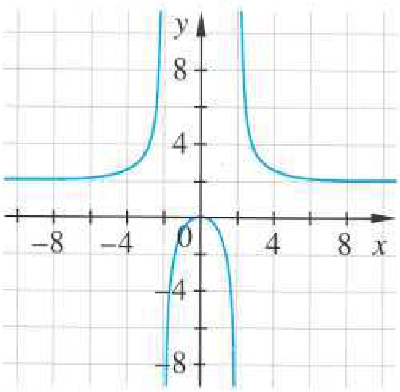
a) *89/7*



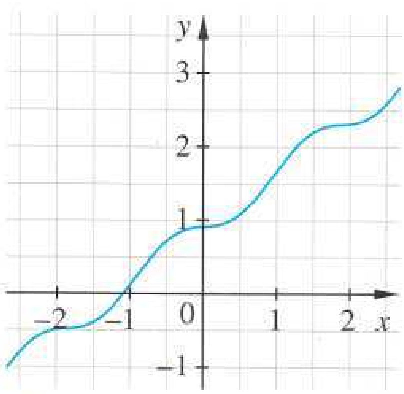
b) *89/8*



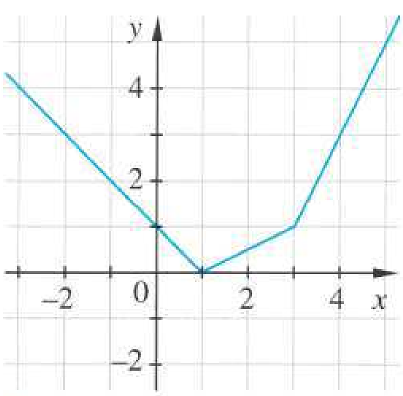
c) *89/9*



d) *89/10*



e) *89/11*



f) *89/12*