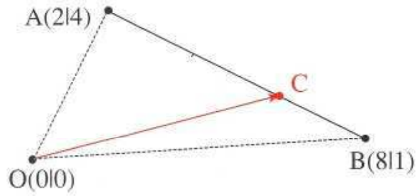
C. Exkurs: Kombination von Rechenoperationen / Vektorzüge

Beispiel: Drittelung einer Strecke
Gegeben ist die Strecke $\overline{AB}$ mit den Endpunkten $A(2|4)$ und $B(8|1)$. Punkt C teilt die Strecke im Verhältnis 2 : 1. Bestimmen Sie die Koordinaten von C.



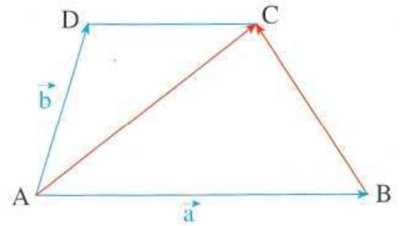
Lösung:
Der Ortsvektor $\overrightarrow{OC}$ des gesuchten Punktes C lässt sich durch den Vektorzug $\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ darstellen, wie dies aus der Skizze zu erkennen ist.
Die rechts aufgeführte Rechnung führt auf das Resultat $C(6|2)$.

Berechnung des Ortsvektors von C:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}\\ &= \overrightarrow{OA}+\tfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\\ &= \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}+\tfrac{2}{3}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Geometrische Figuren können oft durch einige wenige Basisvektoren festgelegt bzw. aufgespannt werden. Weitere in den Figuren auftretende Vektoren können dann mithilfe dieser Basisvektoren als Vektorzug dargestellt werden.

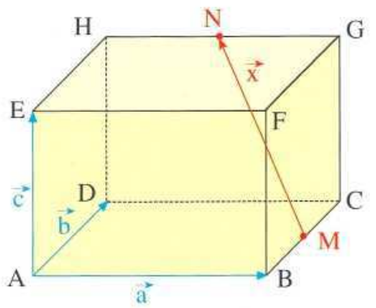
Beispiel: Vektoren im Trapez
Ein achsensymmetrisches Trapez wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. Die Decklinie des Trapezes ist halb so lang wie die Grundlinie.
Stellen Sie die Vektoren $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BC}$ mithilfe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ dar.



Lösung:
Wir arbeiten zur Darstellung mit Vektorzügen, die $\vec{a}$ und $\vec{b}$ enthalten. Dabei beachten wir, dass $\overrightarrow{DC}=\frac{1}{2}\vec{a}$ gilt, denn $\overrightarrow{DC}$ ist parallel zu $\vec{a}$ und halb so lang.
Die Rechenwege und Resultate sind rechts aufgeführt.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\\ &= \vec{b}+\tfrac{1}{2}\vec{a}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC} = -\vec{a}+\vec{b}+\tfrac{1}{2}\vec{a}\\ &= \vec{b}-\tfrac{1}{2}\vec{a}\end{aligned}$$



Übung 14 Vektoren im Quader
Der abgebildete Quader wird durch die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt. Der Vektor $\vec{x}$ verbindet die Mittelpunkte M und N zweier Quaderkanten.

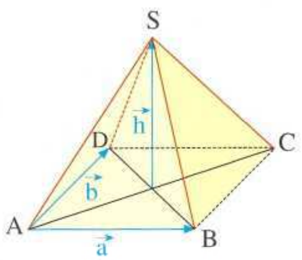
a) Stellen Sie den Vektor $\vec{x}$ mithilfe der aufspannenden Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

b) Berechne die Ortsvektoren $\overrightarrow{OH}$ und $\overrightarrow{OM}$. Bekannt soll sein:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-3\\4\\5{,}5\end{pmatrix}, \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \text{ und } \vec{c}=\begin{pmatrix}0\\0\\2{,}25\end{pmatrix}$$

Übung 16 Vektoren in einer Pyramide

a) Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche ABCD und die Spitze S. Sie wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ wie abgebildet aufgespannt. Stellen Sie die Seitenkantenvektoren $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{BS}$, $\overrightarrow{CS}$ und $\overrightarrow{DS}$ mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{h}$ dar.



b) Eine Pyramide ist 160 Meter hoch und am Boden 230 Meter breit. Berechne die Länge einer Seitenkante.

Übungen

19. Abstand von Punkten

a) Bestimmen Sie den Abstand der Punkte A und B.
A(3 | 1) und B(6 | 5), A(1 | 2 | 3) und B(3 | 5 | 9), A(−1 | 2 | 0) und B(1 | 6 | 4)

b) Wie muss a gewählt werden, damit A(2 | 1 | 2) und B(3 | a | 10) den Abstand 9 besitzen?

20. Schrägbild und Volumen einer Pyramide

Gegeben sind die Punkte A(0 | 4 | 2), B(6 | 4 | 2), C(10 | 8 | 2), D(4 | 8 | 2) und S(5 | 6 | 8). Sie bilden eine Pyramide mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S.

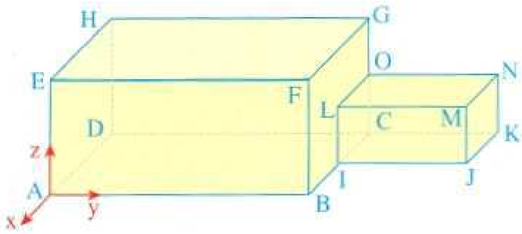
a) Zeichnen Sie ein Schrägbild der Pyramide. Bestimmen Sie den Fußpunkt F der Höhe.

b) Zeigen Sie, dass ABCD ein Parallelogramm ist. Bestimmen Sie das Pyramidenvolumen.

21. Spaltenvektoren

Das abgebildete Objekt besteht aus Quadern der Größe $8\times4\times4$ und $4\times2\times2$. Stellen Sie die folgenden Vektoren als Spaltenvektoren dar.

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CJ}$, $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{JM}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{GM}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{GI}$



22. Addition und Subtraktion von Vektoren, der Betrag eines Vektors

a) Gegeben sind die Spaltenvektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}6\\0\\5\end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie den Betrag von $\vec{x}$.

$\vec{x}=\vec{a}$, $\vec{x}=\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{x}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{x}=\vec{b}-2\vec{a}+\vec{c}$, $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{x}=2\vec{a}-\vec{b}-2\vec{c}$

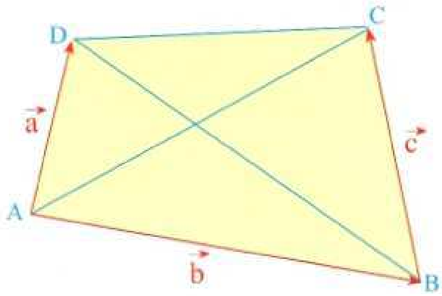
b) Gegeben sind die Punkte P(2 | 2 | 1), Q(5 | 10 | 15), R(3 | a | 0), S(4 | 6 | 5). Wie muss a gewählt werden, wenn die Differenz der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{RS}$ den Betrag 11 besitzen soll?

23. Vektoren im Viereck

Das abgebildete Viereck wird von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannt.

a) Stellen Sie die folgenden Vektoren mithilfe von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.
$\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{BD}$

b) Es sei A(4 | 0 | 0), B(2 | 4 | 2), C(0 | 2 | 3) und D(4 | −6 | −1). Bestimmen Sie den Umfang des Vierecks und begründen Sie, dass es ein Trapez ist.



24. Parallelogramme

Ein Dreieck ABC kann durch Hinzunahme eines weiteren Punktes D zu einem Parallelogramm ergänzt werden. Es gibt stets drei Möglichkeiten für die Konstruktion eines solchen Punktes D. Bestimmen Sie diese Möglichkeiten für folgende Dreiecke:

a) A(2 | 4), B(8 | 3), C(4 | 6)
Lösen Sie die Aufgabe im Koordinatensystem zeichnerisch.

b) A(4 | 6 | 3), B(2 | 8 | 5), C(0 | 0 | 4)
Lösen Sie die Aufgabe rechnerisch mithilfe von Spaltenvektoren.