

3. Rechnen mit Vektoren

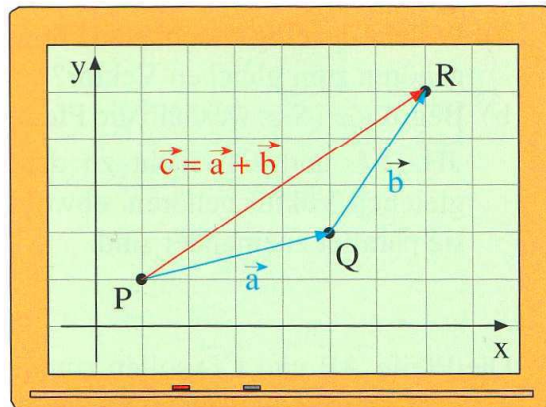
A. Addition und Subtraktion von Vektoren

Der Punkt $P(1|1)$ wird zunächst mithilfe des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ in den Punkt $Q(5|2)$ verschoben. Anschließend wird der Punkt $Q(5|2)$ mithilfe des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ in den Punkt $R(7|5)$ verschoben.

Offensichtlich kann man mithilfe des Vektors $\vec{c} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ eine direkte Verschiebung des Punktes P in den Punkt R erzielen.

In diesem Sinne kann der Vektor $\vec{c}$ als Summe der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ betrachtet werden.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$



Addition von Vektoren:

$$P(1|1) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}} Q(5|2) \xrightarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}} R(7|5)$$

$\xrightarrow{\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}}$

Definition II.2: Unter der **Summe** zweier Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ versteht man den Vektor, der entsteht, wenn man die einander entsprechenden Koordinaten von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ addiert:

Addition in der Ebene:

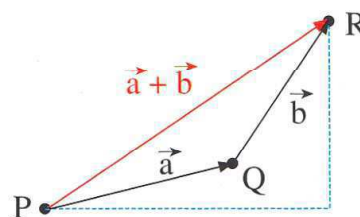
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$

Addition im Raum:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch lässt sich die Addition zweier Vektoren mithilfe von Pfeilrepräsentanten nach der folgenden Dreiecksregel ausführen.

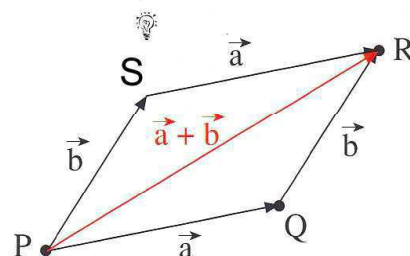
Dreiecksregel (Addition durch Aneinanderlegen): Ist $\overrightarrow{PQ}$ ein Repräsentant von $\vec{a}$ und $\overrightarrow{QR}$ der in Q beginnende Repräsentant von $\vec{b}$, so ist $\overrightarrow{PR}$ ein Repräsentant der Summe $\vec{a} + \vec{b}$.



Offensichtlich spielt die Reihenfolge bei der Hintereinanderausführung von Parallelverschiebungen keine Rolle, da die resultierende Verschiebung in x-, y- bzw. z-Richtung gleich bleibt. Die Addition von Vektoren ist also **kommutativ**. Hieraus ergibt sich eine weitere geometrische Deutung des Summenvektors, die sog. **Parallelogrammregel**.

Parallelogrammregel:

Der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$ lässt sich als Diagonalenvektor in dem durch $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm darstellen.



Übung 1

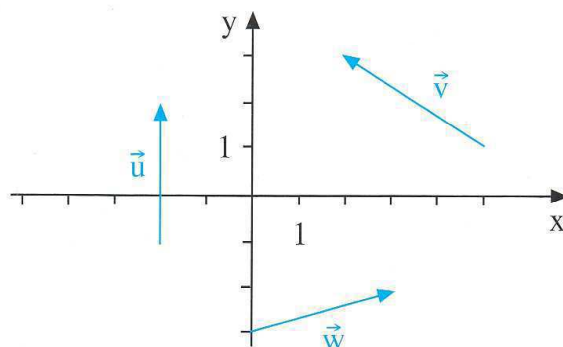
Berechnen Sie die Summe der beiden Vektoren, sofern dies möglich ist.

- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Übung 2

Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die angegebene Summe.

- a) $\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} + \vec{w}$ c) $\vec{v} + \vec{w}$
 d) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ e) $\vec{v} + \vec{u}$
 f) $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ g) $\vec{u} + \vec{u}$



Übung 3

Was fällt Ihnen auf, wenn Sie die Resultate von Übung 2 a) und 2 e) bzw. von 2 d) und 2 f) vergleichen?

Neben dem Kommutativgesetz gelten bei der Addition von Vektoren auch noch einige weitere Rechengesetze, die Rechnungen erheblich erleichtern können, wie das Assoziativgesetz.

Satz II.1: $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ seien Vektoren in der Ebene bzw. im Raum. Dann gilt:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Kommutativgesetz
Assoziativgesetz

Die folgenden, mithilfe von Definition II.2 trivial zu beweisenden Sätze führen auf die wichtigen Begriffe „Nullvektor“ und „Gegenvektor“.

Satz II.2: Es gibt sowohl in der Ebene als auch im Raum genau einen Vektor $\vec{0}$, für den gilt: $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ für alle Vektoren $\vec{a}$. Er heißt **Nullvektor**.

Nullvektor
in der Ebene

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nullvektor
in Raum

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

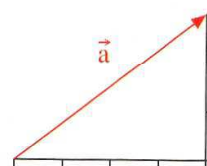
Satz II.3: Zu jedem Vektor $\vec{a}$ der Ebene bzw. des Raumes gibt es genau einen Vektor $-\vec{a}$, sodass gilt:
 $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

$-\vec{a}$ heißt **Gegenvektor** zu $\vec{a}$.

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

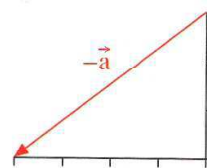
Vektor Gegenvektor Vektor Gegenvektor

Vektor



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Gegenvektor



$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Geometrisch bedeutet der Gegenvektor $(-\vec{a})$ diejenige Parallelverschiebung, die eine Verschiebung mittels $\vec{a}$ bei der Hintereinanderausführung wieder rückgängig macht. Mithilfe des Gegenvektors lässt sich die Subtraktion von Vektoren definieren.

Definition II.3: Die Differenz $\vec{a} - \vec{b}$ zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sei gegeben durch:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

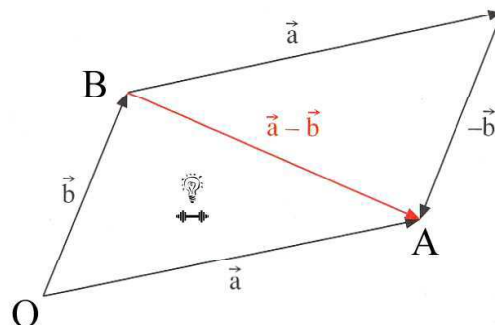
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geometrisch kann man die Differenz der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ähnlich wie deren Summe als Diagonalenvektor in dem von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramm interpretieren.

Wegen $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ wird diese Differenz durch den Pfeil repräsentiert, der von der Pfeilspitze eines Repräsentanten des Vektors $\vec{b}$ zur Pfeilspitze des Repräsentanten von $\vec{a}$ geht, der den gleichen Anfangspunkt wie der Repräsentant von $\vec{b}$ hat.

Parallelogrammregel für die Subtraktion



Übung 4

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie den angegebenen Vektorterm, sofern dies möglich ist.

- | | | | | |
|----------------------------------|--|------------------------|----------------------------------|------------------------|
| a) $\vec{a} - \vec{b}$ | b) $\vec{c} - \vec{d}$ | c) $\vec{e} - \vec{f}$ | d) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}$ | e) $\vec{a} - \vec{e}$ |
| f) $\vec{a} + \vec{c} - \vec{d}$ | g) $\vec{d} + \vec{d} - \vec{b} + \vec{a} - \vec{c} - \vec{b}$ | h) $\vec{0} - \vec{a}$ | i) $\vec{a} - \vec{a}$ | |

Übung 5

Bestimmen Sie den Vektor $\vec{x}$.

- | | | |
|--|---|---|
| a) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ | b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{x}$ | c) $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} + \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ |
| d) $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ | e) $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ | f) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ |